I – FACTORISER

Factoriser une somme (ou une différence), c'est transformer cette somme en produit.

Pour factoriser, on se pose les questions suivantes **:**

1. Y a-t-il un facteur commun aux termes de la somme ?

$$\boxed{a\times} b + \boxed{a\times} c = \boxed{a\times} (b + c)$$

Exemples :

$A = 27x^2 - 15x$
$A = 27 \times x \times \underline{\mathbf{x}} - 15 \times \underline{\mathbf{x}}$
$A = \underline{\mathbf{x}} (27x - 15)$

$B = 8x^2 + x$
$B = 8 \times x \times \underline{\mathbf{x}} + \mathbf{1} \times \underline{\mathbf{x}}$
$B = \underline{\mathbf{x}} (8x + \mathbf{1})$

$C = (x + 1) (5 - 2x) - (5 - 2x) (2x - 3)$
$C = \underline{\mathbf{(5 - 2x)}} [(x + 1) - (2x - 3)]$
$C = \underline{\mathbf{(5 - 2x)}} [x + 1 - 2x + 3]$
$C = \underline{\mathbf{(5 - 2x)}} (- x + 4)$

$D = (x - 2)^2 - 3(x - 2)$
$D = (x - 2) \underline{\mathbf{(x - 2)}} - 3\underline{\mathbf{(x - 2)}}$
$D = \underline{\mathbf{(x - 2)}} [(x - 2) - 3]$
$D = \underline{\mathbf{(x - 2)}} (x - 5)$

2. L'expression est-elle une égalité remarquable ?

$$a^2 - b^2 = (a - b) (a + b)$$

Exemples :

$E = 25x^2 - 81$
$E = (5x)^2 - 9^2$
$E = (5x - 9) (5x + 9)$

$F = 36 - (3x - 2)^2$
$F = 6^2 - (3x - 2)^2$
$F = [6 - (3x - 2)] [6 + (3x - 2)]$
$F = [6 - 3x + 2] [6 + 3x - 2]$
$F = (3x + 4) (- 3x + 8)$

II PRODUIT DE FACTEURS NUL ET EQUATION PRODUIT.

***Propriété* : Un produit de facteurs est nul si et seulement si un de ses facteurs est nul.**

Autrement dit : **A × B = 0 si et seulement si A = 0 ou B = 0**

→ *Application à la résolution d'une équation-produit.*

On appelle équation-produit une équation dont le premier membre est un produit d'au moins deux facteurs du premier degré et dont le deuxième membre est nul.

Exemples :

- $(3x - 1)(2x + 5) = 0$

D'après la règle du produit nul : **A × B = 0 si et seulement si A = 0 ou B = 0**

$3x - 1 = 0$	ou	$2x + 5 = 0$
$3x - 1 + 1 = 0 + 1$	ou	$2x + 5 - 5 = 0 - 5$
$3x = 1$	ou	$2x = -5$
$\frac{3x}{3} = \frac{1}{3}$	ou	$\frac{2x}{2} = \frac{-5}{2}$
$x = \frac{1}{3}$	ou	$x = -\frac{5}{2}$

Les solutions de l'équation sont : $\frac{1}{3}$ et $-\frac{5}{2}$. On écrit : S = $\{ -\frac{5}{2} ; \frac{1}{3} \}$

- $3x(5 - 7x) = 0$

D'après la règle du produit nul : **A × B = 0 si et seulement si A = 0 ou B = 0**

$3x = 0$	ou	$5 - 7x = 0$
$\frac{3x}{3} = \frac{0}{3}$	ou	$5 - 7x - 5 = 0 - 5$
$x = 0$	ou	$-7x = -5$
$x = 0$	ou	$\frac{-7x}{-7} = \frac{-5}{-7}$
$x = 0$	ou	$x = \frac{5}{7}$

Les solutions de l'équation sont : 0 et $\frac{5}{7}$. On écrit : S = $\{ 0 ; \frac{5}{7} \}$

III <u>RESOLUTION D'UNE EQUATION DE DEGRE SUPERIEUR à 1</u>

En troisième, on ne peut résoudre une équation de degré supérieur à 1 qu'en la transformant en équation- produit.

<u>Exemples</u> :

- **$(2x-1)^2-(2x-1)(x+3)=0$**

<u>Etape 1</u> : Le second membre est déjà égal à 0 !

<u>Etape 2</u> : On factorise le premier membre. Il y a un facteur commun : (2x – 1)

$(2x-1)^2-(2x-1)(x+3)=0$
$\underline{\mathbf{(2x-1)}}\,(2x-1)-\underline{\mathbf{(2x-1)}}\,(x+3)=0$
$\underline{\mathbf{(2x-1)}}\,[\,(2x-1)-(x+3)\,]=0$
$\underline{\mathbf{(2x-1)}}\,[\,2x-1-x-3\,]=0$
$\underline{\mathbf{(2x-1)}}\,(x-4)=0$

<u>Etape 3</u> : On applique la règle du produit nul.

D'après la règle du produit nul : **A × B = 0 si et seulement si A = 0 ou B = 0**
$2x-1=0$ ou $x-4=0$

<u>Etape 4</u> : On résout séparément chaque équation.

$2x-1=0$	ou	$x-4=0$
$2x-1+1=0+1$	ou	$x-4+4=0+4$
$2x=1$	ou	$x=4$
$\frac{2x}{2}=\frac{1}{2}$	ou	$x=4$
$x=\frac{1}{2}$	ou	$x=4$

Les solutions de l'équation sont $\frac{1}{2}$ et 4. On écrit : S = { $\frac{1}{2}$; 4}

- **$(7x-5)^2-9x^2=0$**

<u>Etape 1</u> : Le second membre est déjà égal à 0 !

<u>Etape 2</u> : On factorise le premier membre. Il y a un facteur commun : (2x – 1)

$(7x-5)^2-9x^2=0$
$\underline{\mathbf{(7x-5)^2}}-\underline{\mathbf{(3x)^2}}=0$
$[(7x-5)-(3x)\,]\,[(7x-5)+(3x)\,]=0$
$[7x-5-3x\,]\,[7x-5+3x\,]=0$
$[4x-5\ ]\,[10x-5\ ]=0$

Etape 3 : *On applique la règle du produit nul.*

D'après la règle du produit nul : **A × B = 0 si et seulement si A = 0 ou B = 0**
$4x - 5 = 0$ ou $10x - 5 = 0$

Etape 4 : *On résout séparément chaque équation.*

$4x - 5 = 0$	ou	$10x - 5 = 0$
$4x - 5 + 5 = 0 + 5$	ou	$10x - 5 + 5 = 0 + 5$
$4x = 5$	ou	$10x = 5$
$\frac{4x}{4} = \frac{5}{4}$	ou	$\frac{10x}{10} = \frac{5}{10}$
$x = 1{,}75$	ou	$x = 0{,}5$

Les solutions de l'équation sont 1,75 et 0,5. On écrit : S = {1,75 ; 0,5}

- **$x^2 = 49$**

Etape 1 : *On annule le second membre.*

$x^2 = 49$
$x^2 - 49 = 49 - 49$
$x^2 - 49 = 0$

Etape 2 : *On factorise le premier membre. Il n'y a pas de facteur commun mais c'est en revanche une expression de la forme $a^2 - b^2$.*

$x^2 - 49 = 0$
$x^2 - 7^2 = 0$
$(x - 7)\,(x + 7) = 0$

Etape 3 : *On applique la règle du produit nul.*

D'après la règle du produit nul : **A × B = 0 si et seulement si A = 0 ou B = 0**
$x - 7 = 0$ ou $x + 7 = 0$

Etape 4 : *On résout séparément chaque équation.*

$x - 7 = 0$	ou	$x + 7 = 0$
$x - 7 + 7 = 0 + 7$	ou	$x + 7 - 7 = 0 - 7$
$x = 7$	ou	$x = -7$

Les solutions de l'équation sont 7 et – 7. On écrit : S = { – 7 ; 7}

<u>Généralisation</u> : les équations de la forme $x^2 = a$.

<u>Théorème</u> : Soit a un nombre donné.

- **Si $a < 0$ l'équation $x^2 = a$ n'a pas de solution**
- **Si $a = 0$ l'équation $x^2 = 0$ admet une solution : le nombre 0.**
- **Si $a > 0$ l'équation $x^2 = a$ admet deux solutions : $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$**

= 0 admet une solution : le nombre 0.

- **Si $a > 0$ l'équation $x^2 = a$ admet deux solutions : $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$**

<u>Exemples</u> :

(1) L'équation $x^2 = 4$ **admet exactement 2 solutions : $\sqrt{4} = 2$ et $-\sqrt{4} = -2$**

(2) L'équation $x^2 = 7$ **admet exactement 2 solutions : $\sqrt{7}$ et $-\sqrt{7}$.**

(3) L'équation $x^2 = -1$ **n'admet pas de solution**